BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ТРЕХТОЧЕЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ш.И.ДЖАБРАИЛОВ

Бакинский Государственный Университет

shamo_c@mail.ru

Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с неточными исходными данными. При некоторых условиях на исходные данные доказана сходимость последовательности решений возмущенной задачи оптимального управления к исходной по функционалу и градиенту.

При моделировании, разработке методов и численном решении прикладных задач оптимального управления возникает проблема выяснения близости двух математических моделей, одна из которых рассматривается как возмущённая по отношению к другой. Эти возмущения могут быть вызваны неточностью информации о коэффициентах уравнений, малостью некоторых параметров, аппроксимацией уравнений и функций и т.д. Такие задачи для задачи Коши исследованы в работах [1, 2].

В данной работе изучается устойчивость задачи оптимального управления для систем с трехточечными граничными условиями.

Пусть требуется минимизация функционала

$$J(u)=\alpha\|x(t_0;u)-y\|^2+\beta\|x(T_0;u)-z\|^2, \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\dot{x}=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t), \quad t_0\le t\le T, \tag{2}$$

$$D_0x(t_0)+D_1x(t_1)+D_2x(T)=c, \tag{3}$$

$$u=u(\cdot)\in U\subseteq L_2^r[t_0,T]. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что $A(t), B(t), f(t)$ – заданные кусочно-непрерывные матрицы функции порядка $n\times n, n\times r, n\times 1$, соответственно; α и β – неотрицательные заданные числа; моменты времени t_0,T $t_0\le t\le T$ и $y, z, c\in E^n$ - заданы; D_0, D_1 и D_2 - постоянные матрицы размерности $n\times n$ причем, $\det(D_0+D_1+D_2)\ne 0$. U – выпуклое замкнутое ограниченное множество. В работе [3] показано, что функционал (1) при ограничениях (2)-(4) дифференцируем и его градиент имеет вид:

$$J'(u)=B^*(t)\Psi(t;u)\in L_2^r[t_0,T], \tag{5}$$

где $\Psi(t;u)$ – решение краевой задачи

$$\dot{\Psi}(t) = -A^*(t)\Psi(t) \ , \tag{6}$$

$$\Psi(T) = -2\beta(x(T;u) - z)^* + D_2^*\lambda \ , \tag{7}$$

$$\Psi(t_0) = 2\alpha(x(t_0;u) - y)^* + D_0^*\lambda \ , \tag{8}$$

$$\Psi(t_0 + 0) - \Psi(t_1 - 0) = D_1^*\lambda \ , \tag{9}$$

где $*$ - означает транспонирование.

При некоторых дополнительных условиях на исходные данные задачи можно показать, что при каждом фиксированном допустимом управлении задачи (2)-(4) и (6)-(9) имеют единственное решение и при этом

$$\|x(t;u)\| \le c_0 \quad \text{и} \quad \|\Psi(t;u)\| \le c_1,$$

где c_0, c_1 - некоторые постоянные, которые зависят от данных задач.

Теперь рассмотрим возмущенную задачу оптимального управления: требуется минимизировать функционал

$$J_k(u) = \alpha_k \|x_k(t_0;u) - y_k\|^2 + \beta_k \|x_k(T;u) - z_k\|^2 \tag{10}$$

при ограничениях

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + B_k(t)u(t) + f_k(t), \quad t_0 \le t \le T \ , \tag{11}$$

$$D_0 x_k(t_0) + D_1 x_k(t_1) + D_2 x_k(T) = c_k \ , \tag{12}$$

$$u \in U \subseteq L_2^r[t_0, T] \ . \tag{13}$$

Здесь предполагается, что матрицы $A_k(t), B_k(t), f_k(t)$ точки y_k, z_k, c_k и числа α_k, β_k являются приближениями соответствующих матриц $A(t), B(t), f(t)$, точек y, z, c и чисел α, β ; при этом

$$\max\Big\{\sup_{[t_0,T]}\|A_k(t) - A(t)\|, \sup_{[t_0,T]}\|B_k(t) - B(t)\|, \sup_{[t_0,T]}\|f_k(t) - f(t)\|, \tag{14}$$
$$\|y_k - y\|, \|c_k - c\|, \|z_k - z\|, \|\alpha_k - \alpha\|, \|\beta_k - \beta\|\Big\} \le \eta_k \ , \quad k = 1,2,\ldots$$
$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$$

Обозначим через $m_k = \min\limits_U J_k(u)$, $m = \min\limits_U J(u)$.

Теорема. Пусть выполняются вышеперечисленные условия. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|J_k'(u) - J'(u)\|_{L_2[t_0,T]} = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} m_k = m \ .$$

Доказательство: Очевидно, разность $\Delta x_k(t) = x_k(t;u) - x(t;u)$ удовлетворяет условиям

$$\dot{\Delta x_k}(t)=A_k(t)\Delta x_k(t)+(A_k(t)-A(t))x(t)+(B_k(t)-B(t))u(t)+f_k(t)-f(t) \tag{15}$$
$$t_0\le t\le T$$
$$D_0\Delta x_k(t_0)+D_1\Delta x_k(t_1)+D\Delta x_k(T)=c_k-c \tag{16}$$
Краевую задачу (15), (16) можно представить в виде
$$\Delta x_k(t)=(D_0+D_1+D_2)^{-1}(c_k-c)-(D_0+D_1+D_2)^{-1}D_1\int_{t_o}^{t_1}[A_k(t)\Delta x_k(t)+$$
$$+(A_k(t)-A(t))x(t)+(B_k(t)-B(t))u(t)+(f_k(t)-f(t))]dt-$$
$$-(D_0+D_1+D_2)^{-1}D_2\int_{t_o}^{t_2}[A_k(t)\Delta x_k(t)+(A_k(t)-A(t))x(t)+$$
$$+(B_k(t)-B(t))u(t)+(f_k(t)-f(t))]dt+\int_{t_o}^{t}[A_k(t)\Delta x_k(t)+(A_k(t)-A(t))x(t)+$$
$$+(B_k(t)-B(t))u(t)+(f_k(t)-f(t))]dt$$
Отсюда при условии
$$A_{\max}\left[1+\left\|(D_0+D_1+D_2)^{-1}D_1(t_1-t_0)\right\|+\left\|(D_0+D_1+D_2)^{-1}D_2(t_2-t_0)\right\|\right]<1 \tag{17}$$
получаем, что существует число $c_2>0$ такое, что
$$\max_{[t_o,T]}\|\Delta x_2(t)\|\le c_2\eta_k . \tag{18}$$
В качестве приближения для градиента $J'(u)$ возьмем
$$J'_k(u)=B_k^*(t)\Psi_k(t;u)\in L_2[t_0,T]. \tag{19}$$
где $\Psi_k(t;u)$ определяется из краевой задачи
$$\dot{\Psi}_k(t)=-A_k^*(t)\Psi_k(t) , \tag{20}$$
$$\Psi_k(T)=-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)^*-D_2^*\lambda_k , \tag{21}$$
$$\Psi_k(t_0)=2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)^*+D_0^*\lambda_k , \tag{22}$$
$$\Psi_k(t_1+0)-\Psi_k(t_1-0)=D_1^*\lambda_k . \tag{23}$$
Заметим, что из краевых условий (7)-(9) и (21)-(23) можно исключить вектор λ. Действительно,
$$(D_0+D_1+D_2)^*\lambda_k=\Psi_k(t_0)-\Psi_k(T)+2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)^*-$$
$$-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)^*+\Psi_k(t_1+0)-\Psi_k(t_1-0).$$
Отсюда
$$\lambda_k=[D_0+D_1+D_2]^{-1}\{\Psi_k(t_0)-\Psi_k(T)-2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)-$$
$$-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)+\Psi_k(t_1+0)-\Psi_1(t_1-0)\}. \tag{24}$$
(24) учтем в равенствах (20)-(23) и в результате имеем:

$$
\begin{aligned}
&(D_0+D_1)(D_0+D_1+D_2)^{-1}\Psi_k(T)=-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)-\\
&-D_2^*(D_0+D_1+D_2)^{-1}\{\Psi_k(t_0)-\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)-\\
&-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)+\Psi_k(t_1+0)-\Psi(t_1-0)\};\\
&(D_1+D_2)(D_0+D_1+D_2)^{-1}\Psi_k(t_0)=2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)-\\
&-D_0^*(D_0+D_1+D_2)^{-1}\{\Psi_k(T)+2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)+\\
&+2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)+\Psi_k(t_0+0)-\Psi_k(t_0-0)\};\\
&(D_0+D_2)(D_0+D_1+D_2)^{-1}(\Psi(t_1-0)-\Psi(t_1-0))=\\
&=D_1^*(D_0+D_1+D_2)^{-1}\{\Psi_k(t_0)-\Psi_k(T)-2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)-\\
&-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)\}.
\end{aligned}
$$

Аналогичные преобразования можно провести для краевых условий (7)-(9).

Очевидно, функция $\Delta\Psi_k(t)=\Psi_k(t)-\Psi(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения

$$
\Delta\dot{\Psi}_k(t)=-A_k^*(t)\Delta\Psi_k(t)+\left(A_k^*(t)-A^*(t)\right)\Psi(t) \tag{25}
$$

с граничными условиями

$$
\Delta\Psi_k(T)=-2\beta_k(x_k(T;u)-z_k)+2\beta(x(T;u)-z)+D_2^*(\lambda-\lambda_k)
$$

$$
\Delta\Psi_k(t_0)=2\alpha_k(x_k(t_0;u)-y_k)-2\alpha(x(t_0;u)-y)+D_0^*(\lambda_k-\lambda)
$$

$$
\Delta\Psi_k(t_1+0)-\Delta\Psi_k(t_1-0)=D_1^*(\lambda_k-\lambda_1).
$$

При условии (17) можно показать, что существует $c_3>0$ такое, что

$$
\max_{[t_o,T]}\|\Delta\Psi_k(t)\|\le c_3 . \tag{26}
$$

Из формул (5) и (19) имеем

$$
J_k'(u)-J'(u)=\int_{t_o}^{T}B_k^*(t)\Delta\Psi_k(t)dt+\int_{t_o}^{T}\left(B_k^*(t)-B^*(t)\right)\Psi_k(t;u)dt .
$$

Переходя к норме в $L_2^r[t_0,T]$, получим:

$$
\|J_k'(u)-J'(u)\|_{L_2^2[t_o,T]}\le c_3(B_{\max}+\eta_k)(T-t_0)\eta_k+c_1(T-t_0)\eta_k=c_4\eta_k \ ..... \tag{27}
$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to 0}\|J_k'(u)-J'(u)\|=0$.

Теперь покажем вторую часть теоремы. Так как U выпукло, замкнуто и ограничено, значит оно слабо компактно. Функционалы $J(u)$ и $J_k(u)$ непрерывно дифференцируемы на U . По теореме Вейерштрасса такие функционалы достигают своего минимального значения $J(u)$. Это означает $U_* =\left\{u\in U\,\middle|\, J(u)=\min\limits_U J(u)\right\}\ne\varnothing$ и

$$
U_{k*}=\left\{u_{*k}=U\,\middle|\, J_k(u_{*k})=\min_U J_k(u)\right\}\ne\varnothing.
$$

Теперь можно легко оценить разность $J_k(u) - J(u)$ и можно показать, что существует $c_4 > 0$ такое, что

$$|J_k(u) - J(u)| \le c_4 \eta_k$$

Отсюда следует

$$\lim_{k \to \infty} m_k = m$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального Управления. М.: ВЦ РАН, 2000, 151 с.
3. Djabrailov Sh., Sharifov Ya. First order necessary optimality conditions for the systems with three-point boundary conditions. SJAM // v. 9, № 2, 2008, p.83-93.

ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD ŞƏRTLİ SİSTEMLƏRDƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN DAYANIQLIĞI

Ş.İ.CƏBRAYILOV

XÜLASƏ

İlkin verilənləri dəqiq olmayan xətt-kvadratik optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Müəyyən şərtlər daxilində həyəcanmış optimal idarəetmə məsələləri ardıcıllığının ilkin məsələyə funksionala və qradientə görə yığılması isbat olunmuşdur.

STABILITY OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM WITH THREE-POINT BOUNDARY CONDITIONS

Sh.I.JABRAYILOV

SUMMARY

Linear-quadratic optimal control problem with constrict initial data is considered. Convergence of the sequence of perturbed optimal control problems to initial problem by functional and gradient is proved under some conditions on initial data.